Lösungen: Übungsblatt 12 zur Quantenelektronik I

Aufgabe 1 Elektro-optischer Effekt

a) Durch eine angelegte Spannung U erhalten wir eine Änderung des Brechungsindex von $\Delta n \approx -\frac{1}{2} n^3 rU / d$, wobei n der entsprechende Brechungsindex ohne Spannung und r der zugehörige elektro-optische Koeffizient ist. Begründung dieser Beziehung: Da $\Delta(1/n^2) = rE$, kann man auch schreiben $\frac{d}{dE}\left(\frac{1}{n^2}\right) = r$ und dies auf beiden Seiten mit $\frac{dE}{dn}$ multiplizieren. Also $\frac{dE}{dn}\frac{d}{dE}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{dE}{dn} r$. Führt man die Ableitung auf der linken Seite aus, lässt sich dies umschreiben in $dn = -\frac{1}{2} n^3 r dE$, womit obige Beziehung gezeigt wäre. Daraus ergibt sich eine Phasenänderung von $\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} L \frac{1}{2} n^3 rU / d = -\frac{\pi L n^3 rU}{\lambda d}$ mit der Länge L = 1 cm. Das ergibt für die beiden Polarisationsrichtungen die Werte $|\Delta\varphi_x| =$ 282 mrad und $|\Delta\varphi_z| =$ 911 mrad.

b) Die Polarisation am Ausgang ist immer dann linear, wenn sich die Phasenverschiebungen für beide Richtungen um ein Vielfaches von π unterscheiden, sonst elliptisch oder zirkular. Die Differenz der Phasenverschiebungen ohne angelegte Spannung ist in der Praxis meist nicht bekannt, da sie von der genauen Länge des Kristalls abhängt (jeder Mikrometer zählt!). Wir haben aber $\frac{\partial}{\partial U}(\Delta\varphi_z - \Delta\varphi_x) = -\frac{\pi L (n_z^3 r_{33} - n_x^3 r_{13})}{\lambda d}$ = -6.29 rad/kV. Also liegen die Spannungswerte, für die die Polarisation am Ausgang linear wird, jeweils um ca. 500 V voneinander entfernt. Man beachte, dass die Polarisationsrichtung sich von einem Wert zum nächsten um 90° dreht, so dass nur alle 1000 V der gleiche Polarisationszustand erreicht wird.

c) Wenn wir die Amplitude des Laserstrahls auf 1 setzen, sind die komplexen Amplituden nach dem Kristall $E_x = \exp(i\varphi_x)/\sqrt{2}$ und $E_z = \exp(i\varphi_z)/\sqrt{2}$, wobei φ_x und φ_z von U abhängig sind. Hinter dem Polarisator entsteht also die Amplitude
$E_\mathrm{t} = (\exp(i\varphi_x)\cdot\cos\alpha + \exp(i\varphi_z)\cdot\sin\alpha)/\sqrt{2}$, und die Transmission ist
$T = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot[\exp(i(\varphi_x - \varphi_z) + \text{c.c.}])/2$
$= (1 + \sin 2\alpha\cdot\cos(\varphi_x - \varphi_z))/2$. Hier ist $(\varphi_x - \varphi_z) = \frac{\pi L (n_z^3 r_{33} - n_x^3 r_{13})}{\lambda d}\cdot U + \text{const}$, wobei die Konstante kritisch von der genauen Kristalllänge (und von der Temperatur des Kristalls) abhängt und deshalb in der Praxis meist nicht bekannt ist. Vollständige Modulation wird nur erreicht für $|\sin 2\alpha| = 1$, also z. B. mit α = 45°. Dann variiert die Transmission zwischen 0 und 1, wobei die Periode bzgl. der Spannung 1 kV ist.

d) Wir haben $\frac{\partial}{\partial T}(\varphi_z - \varphi_x) = \frac{2\pi L}{\lambda}(\partial n_z / \partial T - \partial n_x / \partial T)$ = 2 rad/K. Also entspricht ein Kelvin einer Spannungsänderung um (2/6.29) kV = 0.32 kV oder einem Drittel der Periode. Man sieht also, dass ein so gebauter Modulator sehr sensitiv auf Temperaturänderungen reagieren würde. In der Praxis verwendet man deswegen oft andere Bauformen, bei denen z. B.

zwei Polarisationsrichtungen mit gleicher Temperaturabhängigkeit des Brechungsindex verwendet werden.

Aufgabe 2 Bandbreite von λ/2-Plättchen

a) Die relative Phasenverschiebung ist $\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda}(n_e - n_o)$, und diese ändert sich bei Änderung $\delta\lambda$ der Wellenlänge um $\delta(\Delta\varphi) = \left[-\frac{2\pi d}{\lambda^2}(n_e - n_o) + \frac{2\pi d}{\lambda}\left(\frac{\partial n_e}{\partial\lambda} - \frac{\partial n_o}{\partial\lambda}\right)\right]\cdot\delta\lambda$.
Der erste Term in der Klammer ist hier klar dominierend, und wenn wir den anderen Term vernachlässigen, erhalten wir die Änderung $\delta(\Delta\varphi) \approx -(\Delta\varphi)_0 \cdot \frac{\delta\lambda}{\lambda}$ mit $(\Delta\varphi)_0 = \pi$. Mit dem π/100-Kriterium erhalten wir also einen Wellenlängenbereich von $\lambda/50$ = 12 nm, in dem das Plättchen funktioniert. Natürlich muss die obige Näherung (Vernachlässigen des zweiten Terms) nicht gemacht werden. In diesem Fall beträgt das Resultat 10.8 nm.

b) Das Plättchen funktioniert auch, wenn die Dicke um ein ganzzahliges Vielfaches von 2·29.5 µm = 59 µm erhöht wird, so dass die Herstellung einfacher wird. Allerdings erhöht sich dadurch die Empfindlichkeit gegenüber Wellenlängen- und Temperaturänderungen entsprechend. (Die Empfindlichkeit erhöht sich linear in der Ordnung m des Plättchens. Denn umso dicker das Plättchen, umso länger können sich "Fehler" akkumulieren.)

c) Wenn zwei Quartz-Plättchen so gewählt werden, dass die Differenz der Dicken gerade 29.5 µm ist, funktioniert das resultierende Plättchen gleich wie das Plättchen 0-ter Ordnung aus Teil a), und zwar auch bezüglich Wellenlängen- und Temperaturtoleranz, da Abweichungen der Phasenverschiebungen, die beide Polarisationsrichtungen betreffen, ohne Belang sind (nur der Phasenunterschied zwischen den beiden orthogonalen Polarisationsrichtungen zählt). Analog kann man für Plättchen höherer Ordnung argumentieren.