Lösungen: Übungsblatt 9 zur Quantenelektronik I

Aufgabe 1 Axiale Moden

a) Der axiale Modenabstand beträgt $\Delta f = c/2L$, wenn L die Resonatorlänge ist und der Brechungsindex als 1 angenommen wird. Also ist $L = c/2\Delta f \approx 10$ cm.

b) Wenn die Resonatorlänge etwa so wie oben berechnet gewählt wird, kann nur eine einzelne axiale Mode des Lasers anspringen. Ein Detektor registriert dann eine zeitlich konstante Intensität.
Bei deutlich grösserer Resonatorlänge können es mehrere axiale Moden sein, und in der Tat läuft der Laser dann immer auf mehreren Moden gleichzeitig, weil sogenanntes "spatial hole burning" (s. Skript, Kap. 6.5.8) auftritt. Die Schwebung zwischen den Moden führt zu Intensitätsfluktuationen, und zwar vor allem mit einer Frequenz, die dem Frequenzabstand der axialen Moden entspricht und ihren ganzzahligen Vielfachen.
Bei deutlich kleinerer Resonatorlänge läuft der Laser u. U. gar nicht, wenn nämlich keine axiale Mode genügend nahe bei der Verstärkungslinie liegt. Die Resonatorlänge müsste dann also gezielt abgestimmt werden.

c) Ein Sprung auf die nächste axiale Mode erfolgt, wenn sich die Resonatorlänge um etwa eine halbe Wellenlänge (hier ca. 316 nm) ändert. Das entspricht z. B. bei einem 10 cm langen Resonator einer relativen Längenänderung um ca. $3\cdot 10^{-6}$. Eine solche tritt bei den meisten Materialien für eine Temperaturänderung in der Grössenordnung von 1 K auf.

d) Der Übergang von einer axialen Mode zur nächsten entspricht einer Änderung der Frequenz, die zu einer Phasenänderung pro Umlauf von 2π führt. Also haben wir in erster Ordnung bzgl. der Frequenz $2\pi = \Delta\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega}\Delta\omega$, wobei die Phase $\varphi = 2k_n L$ ist. Daraus ergibt sich $2\pi = 2L\dfrac{\partial k_n}{\partial\omega}\Delta\omega = 2Lv_{\mathrm{g}}^{-1}\Delta\omega$ und schliesslich $\Delta f = \Delta\omega/2\pi = v_{\mathrm{g}}/2L$. Würden wir die Phasengeschwindigkeit anstatt der Gruppengeschwindigkeit einsetzen, hätten wir nur ein in nullter Ordnung bzgl. der Frequenz korrektes Ergebnis – die Dispersion des Mediums würde vernachlässigt.

Aufgabe 2 Doppler- und Druckverbreiterung

a) Die Maxwell-Boltzmann-Verteilung für die Teilchengeschwindigkeiten ist $n(\vec{\mathrm{v}})\, d\mathrm{v}_{\mathrm{x}}\, d\mathrm{v}_{\mathrm{y}}\, d\mathrm{v}_{\mathrm{z}} \propto \exp(-m\mathrm{v}^2/2k_BT)\, d\mathrm{v}_{\mathrm{x}}\, d\mathrm{v}_{\mathrm{y}}\, d\mathrm{v}_{\mathrm{z}}$, wobei $\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2$. Die Dopplerverschiebung für ein Molekül mit v_z ist $\Delta\nu = \nu_0\cdot(\mathrm{v}_z/c)$. Um den Beitrag der Dopplerverschiebung alleine zu erhalten, nehmen wir weiter an, dass die natürliche Linienbreite klein ist gegenüber der Dopplerverschiebung. Wenn wir den obigen Ausdruck für die Dopplerverschiebung nach $\mathrm{v}_{\mathrm{z}} = \Delta\nu\cdot c/\nu_0 = (\nu-\nu_0)\cdot c/\nu_0$ auflösen und in die Maxwell-Boltzmann-Verteilung einsetzen, erhalten wir die Verteilung der geschobenen Frequenzen (= Spektrum). Diese Intensitätsverteilung ist somit proportional zu $\exp(-mc^2(\nu-\nu_0)^2/2\nu_0^2k_BT)$. Die doppelte Halbwertsbreite hiervon bzgl. ν ist

$$\Delta\nu_{\mathrm{D}} = \sqrt{8\ln 2}\sqrt{\frac{k_{\mathrm{B}}T}{mc^2}}\nu_0 .$$

b) Die mittlere Zeit zwischen zwei Stössen ist $1/R$, wobei R die gesuchte Stossrate ist. Das genannte Zylindervolumen ist $\sigma\sqrt{\frac{8k_\mathrm{B}T}{\pi m}}\frac{1}{R}$, wenn wir die mittlere thermische Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{8k_\mathrm{B}T}{\pi m}}$ des Moleküls einsetzen. (Wenn man einfach die mittlere Energie $k_\mathrm{B}T/2$ pro Freiheitsgrad ansetzt, kommt man auf ein nicht ganz korrektes Ergebnis, weil hier das Mittel der Geschwindigkeit und nicht das Mittel ihres Quadrats zählt.) Die Bedingung, dass sich im Mittel ein Molekül im gegebenen Volumen befindet, führt auf $\sigma\sqrt{\frac{8k_\mathrm{B}T}{\pi m}}\frac{1}{R}\cdot N = 1$ und damit auf das Ergebnis $R = \sigma\sqrt{\frac{8k_\mathrm{B}T}{\pi m}}\cdot N$. Mit Hilfe der Gasgleichung $p = N\,k_\mathrm{B}T$ erhalten wir $R = p\sigma\sqrt{\frac{8}{\pi m k_\mathrm{B}T}}$.

Wir haben $\sigma = \pi d^2$ verwendet, weil zwei Moleküle einander nur dann ohne Stoss passieren können, wenn ihr Abstand ihrem Durchmesser (nicht ihrem Radius) entspricht.

c) Die Stossrate R führt zu einer Verbreiterung des Spektrums auf einen Wert in der Grössenordnung von R, wenn wir annehmen, dass bei jedem Stoss die Schwingung eines angeregten Moleküls in Amplitude und/oder Phase erheblich gestört wird (d.h. die Stösse modulieren Amplitude/Phase der Schwingung eines Moleküls mit einer Frequenz von R - diese Modulation führt im Frequenzraum zu "Seitenbändern" im Abstand R). Damit erhalten wir eine Breite des Spektrums, deren Wert bis auf einen konstanten Vorfaktor mit der Formel im Skript übereinstimmt.