

## Lösungen: Übungsblatt 4 zur Quantenelektronik I

### Aufgabe 1 Dispersion im Wellenlängenbereich

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{d^2\phi}{d\omega^2} &= \frac{d}{d\omega} \left( \frac{d\phi}{d\omega} \right) = \frac{d}{d\omega} \left( \frac{nL_d}{c} \left( 1 - \frac{n'}{n} \lambda \right) \right) = \frac{d\lambda}{d\omega} \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{nL_d}{c} \left( 1 - \frac{n'}{n} \lambda \right) \right) \\
 &= -\frac{2\pi c}{\omega^2} \frac{L_d}{c} \left( n' \left( 1 - \frac{n'}{n} \lambda \right) + n \left( -\frac{n''}{n} \lambda - \frac{n'}{n} + \left( \frac{n'}{n} \right)^2 \lambda \right) \right) \\
 &= -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{L_d}{c} \left( n' - \frac{n'^2}{n} \lambda - n'' \lambda - n' + \frac{n'^2}{n} \lambda \right) = \frac{\lambda^3 L_d}{2\pi c^2} n'' \\
 \\
 \frac{d^3\phi}{d\omega^3} &= \frac{d}{d\omega} \left( \frac{d^2\phi}{d\omega^2} \right) = \frac{d\lambda}{d\omega} \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\lambda^3 L_d}{2\pi c^2} n'' \right) = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \cdot \frac{L_d}{2\pi c^2} \cdot (3\lambda^2 n'' + \lambda^3 n''') = -\frac{\lambda^4 L_d}{4\pi^2 c^3} (3n'' + \lambda n''')
 \end{aligned}$$

b) Erst leiten wir den Zusammenhang zwischen  $\frac{d^2\phi}{d\omega^2}$  und  $D_\lambda$  her:

$$\text{Mit } D_\lambda := -\frac{1}{L_d} \frac{dT_g}{d\lambda} = \frac{\omega^2}{2\pi c L_d} \frac{dT_g}{d\omega} \text{ und } T_g := \frac{d\phi}{d\omega} \text{ erhält man } D_\lambda = \frac{\omega^2}{2\pi c L_d} \frac{d^2\phi}{d\omega^2}$$

und somit  $\tau_p(L_d) = \frac{d^2\phi}{d\omega^2} \Delta\omega = \frac{2\pi c L_d D_\lambda}{\omega^2} \Delta\omega = D_\lambda \cdot L_d \cdot \Delta\lambda$ , wobei wir für den letzten

Schritt  $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$  und damit  $\Delta\omega = \frac{\omega}{\lambda} \Delta\lambda = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \Delta\lambda$  verwendet haben.

Die Pulsdauer am Ende der Faser ist also das Produkt aus dem Dispersionskoeffizienten  $D_\lambda$ , der Länge der Faser und der spektralen Bandbreite des Pulses. Optische

Telekommunikation findet normalerweise mit ps-Pulsen über kilometerlange Faserstrecken statt. Da die Zentralwellenlänge für Faserkommunikation üblicherweise bei  $1.3 \mu\text{m}$  oder  $1.55 \mu\text{m}$  liegt, befindet sich die zugehörige Pulsbandbreite im nm Bereich. Entsprechend macht es aus praktischen Gründen sehr viel Sinn, die Einheit von  $D_\lambda$  als

$$\left[ \frac{\text{ps}}{\text{km} \cdot \text{nm}} \right] \text{ zu wählen.}$$

### Aufgabe 2 Doppelpulse

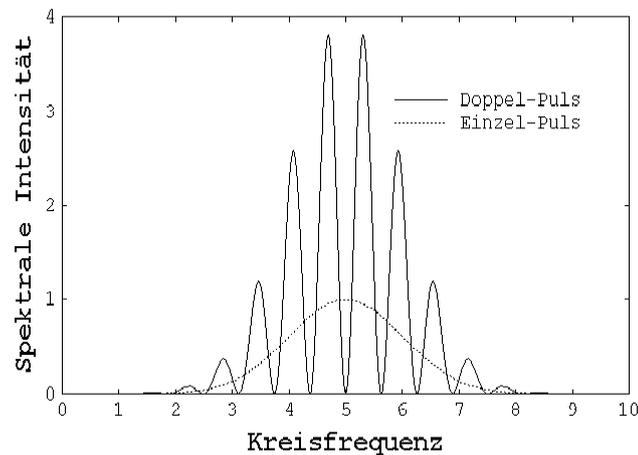
Die Ersetzung  $t \rightarrow t - t_1$  im Zeitbereich entspricht der Multiplikation mit dem Faktor  $\exp(-i\omega t_1)$  im Frequenzbereich. (Die Vorzeichen sind wie im Skript gewählt.) Für den Doppel-Puls erhalten

$$\text{wir } \tilde{A}(\omega) = A_0 \sqrt{\frac{\pi}{\Gamma}} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4\Gamma}\right) \left( \exp(-i\omega t_1 + i\varphi_1) + \exp(-i\omega t_2 + i\varphi_2) \right), \text{ wobei } \varphi_1 \text{ und}$$

$\varphi_2$  die Phasenlagen der einzelnen Pulse bestimmen. Die spektrale Intensität ist

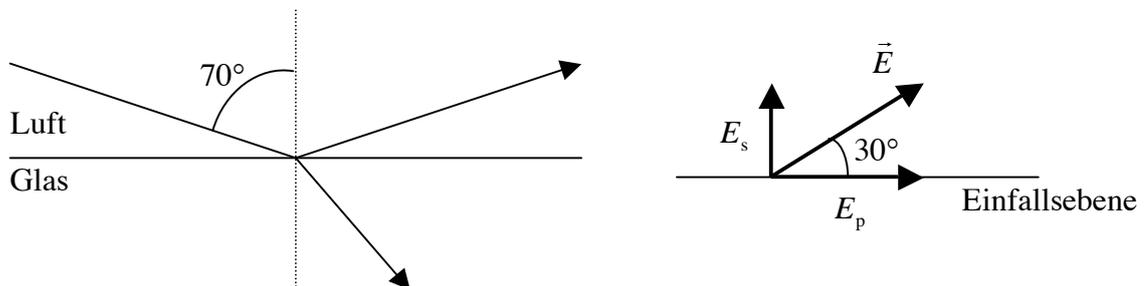
$$\text{dann } |\tilde{A}(\omega)|^2 = |A_0|^2 \frac{2\pi}{\Gamma} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Gamma}\right) \left( 1 + \cos(\omega(t_2 - t_1) + (\varphi_1 - \varphi_2)) \right).$$

Das Intensitätsspektrum (s. Bild weiter unten) zeigt ein Interferenzmuster, weil die Beiträge von den beiden Pulsen in  $\omega$  lineare Phasenterme mit unterschiedlichen Vorfaktoren haben. Die Periode des Musters ist  $2\pi / |t_2 - t_1|$ ; die Oszillation ist also umso schneller, je grösser der zeitliche Abstand der Pulse ist. Die Grösse  $\varphi_1 - \varphi_2$  wurde hier willkürlich so gewählt, dass im Zentrum ein Minimum entsteht. Die gestrichelte Kurve entspricht dem Spektrum eines einzelnen Pulses (mit der Hälfte der Energie und etwa einem Viertel der maximalen Intensität).



### Aufgabe 3 Transmission durch eine Glasoberfläche

a)



b) Die Feldkomponenten sind  $E_p = E_0 \cos 30^\circ = 0.866$  (mit  $E_0 = 1$ )  
und  $E_s = E_0 \sin 30^\circ = 0.5$ .

c) Wir rechnen mit Impedanzen unter Verwendung der Formeln aus dem Skript:

$$Z_{1,p} = Z_0 \cos \theta_1 = 129 \, \Omega, \quad Z_{2,p} = \frac{Z_0}{n} \cos \theta_2 = 196 \, \Omega$$

$$Z_{1,s} = Z_0 / \cos \theta_1 = 1102 \, \Omega, \quad Z_{2,s} = \frac{Z_0}{n} / \cos \theta_2 = 322 \, \Omega$$

und erhalten damit

$$r_p = \frac{Z_{2p} - Z_{1p}}{Z_{2p} + Z_{1p}} = +0.206, \quad t_p = \frac{1 - r_p}{n} = 0.529,$$

$$r_s = \frac{Z_{2s} - Z_{1s}}{Z_{2s} + Z_{1s}} = -0.547, \quad t_s = 1 + r_s = 0.453.$$

Damit ergeben sich die transmittierten Feldamplituden zu  $E_{2p} = t_p E_p = 0.458$  und

---

$E_{2s} = t_s E_s = 0.226$ . Es treten keine Phasensprünge auf, weil sich die Vorzeichen der Feldamplituden nicht ändern.

- d) Für die Polarisationsrichtung des transmittierten Strahls ergibt sich ein Diagramm wie oben rechts, nur mit anderen Winkeln. Der Winkel zur Einfallsebene ist  $\arctan(E_{2s} / E_{2p}) = 26.3^\circ$ .
- e) Bei Einfall eines Strahles unter dem Brewster-Winkel  $\theta_B = \arctan n = 56.3^\circ$  erfolgt keine Reflexion für p-Polarisation, d. h. der reflektierte Strahl ist vollständig s-polarisiert. Wir können wie oben den Reflektionskoeffizienten  $r_s$  für s-Polarisation berechnen, und der Anteil der reflektierten Leistung vom unpolarisierten Strahl ist  $r_s^2 / 2 = 7.4 \%$ . Das ist für eine praktische Anwendung unter Umständen zu wenig.