Lösungen: Übungsblatt 3 zur Quantenelektronik I

Aufgabe 1 Kompression von Attosekundenpulsen

a) Phasengeschwindigkeit: $v_{\mathrm{p}} = c/n \approx 3.33 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$. (> c !)

Für die anderen Grössen verwenden wir die Wellenzahl $k_n(\omega) = (\omega/c)\cdot n(\omega)$ und berechnen die Ableitungen davon näherungsweise:

$$\frac{dk_n}{d\omega} = \frac{k_n(\omega+\Delta\omega) - k_n(\omega-\Delta\omega)}{2\Delta\omega} = 3.8\cdot 10^{-9}\ \mathrm{s/m},$$

$$\frac{d^2k_n}{d\omega^2} = \frac{k_n(\omega+\Delta\omega) + k_n(\omega-\Delta\omega) - 2k_n(\omega)}{(\Delta\omega)^2} = -25\cdot 10^{-27}\ \mathrm{s^2/m},$$

$$\frac{d^3k_n}{d\omega^3} = \frac{k_n(\omega+2\Delta\omega) - 2k_n(\omega+\Delta\omega) + 2k_n(\omega-\Delta\omega) - k_n(\omega-2\Delta\omega)}{2\,(\Delta\omega)^3} = 2.8\cdot 10^{-42}\ \mathrm{s^3/m},$$

wobei wir eine numerische Schrittweite von $\Delta\omega \approx 1.5\cdot 10^{13}\ s^{-1}$ gewählt haben.

Daraus ergibt sich:

$$v_{\mathrm{g}} = \left(\frac{dk_n}{d\omega}\right)^{-1} = 2.6\cdot 10^8\ \mathrm{m/s},\ \mathrm{GDD} = \frac{d^2k_n}{d\omega^2}L = -25\ \mathrm{fs}^2,\ \mathrm{TOD} = \frac{d^3k_n}{d\omega^3}L = 2.8\ \mathrm{fs}^3.$$

Eine "vernünftige" Schrittweite hat man dann gewählt, wenn das Resultat nur unwesentlich von der Schrittweite abhängt.

b) Hierzu lösen wir Gleichung 72 aus Kapitel 2.5.5 des Skripts nach der Länge des dispersiven Mediums auf:

$$L_d = \frac{\tau_p^2(0)}{4\ln 2 k_n''}\sqrt{\frac{\tau_p^2(L_d)}{\tau_p^2(0)} - 1}$$

Aus der gegebenen spektralen Bandbreite können wir mit Hilfe des Zeit-Bandbreite-Produkts eines Gauss-Pulses die transformlimitierte Pulsdauer ausrechnen:

$\Delta E = 12\ \mathrm{eV} \Leftrightarrow \Delta\nu_{\mathrm{p}} = 2.9\cdot 10^{15}\ \mathrm{Hz}$, also $\tau_p(0) = 152\ \mathrm{as}$.

$\tau_p(L_d) = 500\ \mathrm{as}$ ist in der Aufgabenstellung gegeben. Damit hängt die rechte Seite der obigen Gleichung nicht mehr von L_d ab und man findet $L_d \approx 1\ \mu\mathrm{m}$.

c) Bei 40 nm Wellenlänge werden noch ca. 8% des Lichts durch den Film transmittiert. Die gleiche Wellenlänge wird in einem Zentimeter Luft vollständig absorbiert. Aus diesem Grund müssen alle Experimente in diesem Wellenlängenbereich in Vakuum durchgeführt werden.

d) Um den Einfluss der dritten Ordnung Dispersion abzuschätzen betrachten wir Phasenänderung über die Bandbreite des Pulses:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{6}L_d\frac{d^3k_n}{d\omega^3}\Delta\omega^3 \approx 2.8\ \mathrm{rad}$$

Da diese Phasenänderung von der Grössenordnung von π ist, ist die dritte Ordnung Dispersion nicht vernachlässigbar. Für einen Pulse mit zehnmal grösserem Transformlimit, ist die Bandbreite zehnmal kleiner und somit die Phasenänderung 10^3-mal kleiner als in obigem Fall. Somit ist für diese Pulse die höhere Ordnung Dispersion vernachlässigbar.

e) Um die Dispersionskoeffizienten zu bestimmen, wurden die Brechungsindexdaten numerisch abgeleitet. Numerische Ableitungen haben die Eigenschaft, sehr empfindlich auf experimentelles Rauschen zu sein. Deshalb kriegt man üblicherweise spätestens bei der zweiten Ableitung keine brauchbaren Resultate mehr. Das Anwenden von Glättungsalgorithmen oder das Fitten von analytischen Funktionen kann dieses Problem beseitigen. Allerdings ist auch hier Vorsicht geboten. Minimale Interpolationsfehler werden durch das Ableiten massiv verstärkt. So erweisen sich z.B. Polynomfits bei dem hier vorliegenden Problem als völlig ungeeignet. Auch Fits mit der Sellmeier-Gleichung können massive Abweichungen spätestens in der dritten Ableitung aufweisen, wenn nur mit leicht unterschiedlichen Startparametern gefittet wird.

Aufgabe 2 "Chirp" eines Pulses als Effekt von Dispersion

a) Eine einfache harmonische Schwingung mit Kreisfrequenz ω_0 hat eine komplexe Amplitude proportional zu $\exp(i\omega_0 t)$. Die instantane Frequenz ist dann $\omega_\mathrm{i}(t) = \omega_0 = \mathrm{const}$.

b) Wir benutzen die im Skript gegebenen Formeln (36) und (63) (Kapitel 2.4 und 2.5) um $\omega_\mathrm{i}(t) = \omega_0 - 2\,\mathrm{Im}\,\Gamma \cdot \left(\mathrm{t} - \mathrm{L_d}/\mathrm{v_g}\right)$ mit

$\mathrm{Im}\,\Gamma = \mathrm{Im}\dfrac{1}{1/\Gamma_0 + 2ik_n'' L_\mathrm{d}} = \dfrac{-2k_n'' L_\mathrm{d}}{1/\Gamma_0^2 + \left(2k_n'' L_\mathrm{d}\right)^2}$ zu erhalten, also

$\omega_\mathrm{i}(t) = \omega_0 + \dfrac{4k_n'' L_\mathrm{d}}{1/\Gamma_0^2 + \left(2k_n'' L_\mathrm{d}\right)^2} \cdot \left(\mathrm{t} - \mathrm{L_d}/\mathrm{v_g}\right)$. Für das Pulsmaximum bei $\mathrm{t} = \mathrm{L_d}/\mathrm{v_g}$ erhalten wir $\omega_\mathrm{i}(t) = \omega_0$, und ω_i nimmt linear mit t zu, wenn $k_n'' > 0$.

c) Wir haben $\dfrac{d\omega_\mathrm{i}}{\mathrm{dt}} = \dfrac{4k_n'' L_\mathrm{d}}{1/\Gamma_0^2 + \left(2k_n'' L_\mathrm{d}\right)^2}$. Für $2k_n'' L_\mathrm{d} << 1/\Gamma_0$ ist $\dfrac{d\omega_\mathrm{i}}{\mathrm{dt}} \approx \dfrac{4k_n'' L_\mathrm{d}}{1/\Gamma_0^2} \propto L_\mathrm{d}$, während

für $2k_n'' L_\mathrm{d} >> 1/\Gamma_0$ gilt $\dfrac{d\omega_\mathrm{i}}{\mathrm{dt}} \approx \dfrac{4k_n'' L_\mathrm{d}}{\left(2k_n'' L_\mathrm{d}\right)^2} \propto L_\mathrm{d}^{-1}$.

Der Maximalwert von $\dfrac{d\omega_\mathrm{i}}{dt}$ wird erreicht für $2k_n'' L_\mathrm{d} = 1/\Gamma_0$, und dort gilt $\dfrac{1}{\Gamma} = \dfrac{1}{\Gamma_0}(1+i)$,

also $\mathrm{Re}\,\Gamma = \Gamma_0/2$. Da die Pulsdauer proportional zu $\left(\mathrm{Re}\,\Gamma\right)^{-1/2}$ ist (Skript, Gl. (104)), ist sie an diesem Punkt um den Faktor $\sqrt{2}$ erhöht.

Die anschauliche Deutung: Solange $2k_n'' L_\mathrm{d} << 1/\Gamma_0$, ist der Puls nur unwesentlich verbreitert, aber das Phasenprofil erhält einen in t quadratischen Term, dessen Stärke mit L_d zunimmt. Für $2k_n'' L_\mathrm{d} >> 1/\Gamma_0$ dagegen werden die verschiedenen Frequenzanteile zunehmend voneinander zeitlich getrennt. Ein Detektor würde zuerst die niedrigeren Frequenzanteile "sehen" (falls $k_n'' > 0$) und erst später die höheren. Je grösser die zeitliche Verschiebung der Frequenzanteile, desto langsamer nimmt die Frequenz am Detektor zu.

Aufgabe 3 Wellenausbreitung in einem Plasma

a) Der Term mit τ_e beschreibt eine Dämpfung der Bewegung, die etwa durch inelastische Stösse mit den Ionen entstehen könnte.
Die Bewegungsgleichung für die positiven Ionen ist $m_\mathrm{I}(\ddot{x} + \dot{x}/\tau_\mathrm{I}) = +eE$. Die gesamte

Suszeptibilität ist $\bar{\chi}(\omega) = -\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_\mathrm{e}} \frac{1}{\omega^2 - i\omega/\tau_\mathrm{e}} - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_\mathrm{I}} \frac{1}{\omega^2 - i\omega/\tau_\mathrm{I}}$. Der zweite Term (für die Ionen) ist deutlich kleiner als der erste wegen der grösseren Masse der Ionen.

b) Ohne Dämpfung ist die komplexe Suszeptibilität $\bar{\chi}(\omega) = -\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}$. Damit ist der komplexe Brechungsindex $\bar{n}(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}}$. Für $\omega \geq \omega_\mathrm{pl}$ ist dies reell, und die Ausbreitung ist ungedämpft mit einem Brechungsindex < 1, d. h. mit einer Phasengeschwindigkeit oberhalb der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit. Für $\omega < \omega_\mathrm{pl}$ dagegen wird $\bar{n}(\omega)$ imaginär, ebenso wie die Wellenzahl $\bar{k} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}} = \pm i \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2} - 1}$. Dies führt zu exponentiell abfallenden Amplituden. Allerdings geschieht dies nicht durch Absorption (d. h. Übertrag von Energie von der Welle auf das Plasma), sondern durch Reflexion von einfallenden Wellen. An der Fresnel-Formel für die Reflektivität einer imaginären Grenzfläche zwischen Vakuum und dem Plasma sieht man, dass die Reflexion vollständig ist, wenn der Brechungsindex rein imaginär ist. Ausserdem ist physikalisch klar, dass die Elektronen im Mittel keine Energie aufnehmen können.
Die Ionosphäre ist ein Plasma. Die Frequenzen für Kurzwellen (einige MHz) liegen unterhalb der Plasmafrequenz, so dass diese Wellen an der Ionosphäre reflektiert werden. Die Freqenzen für Ultrakurzwellen (um 100 MHz) liegen oberhalb der Plasmafrequenz, werden also nicht nennenswert reflektiert.