Lösungen: Übungsblatt 2 zur Quantenelektronik I

Aufgabe 1 Dispersion im Infraroten und im Röntgenbereich

a) Phasengeschwindigkeit: $v_\mathrm{p} = c/n \approx 2.06 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$.
Für die anderen Gruppengeschwindigkeit verwenden wir die Wellenzahl $k_n(\omega) = (\omega/c)\cdot n(\omega)$ und berechnen die Ableitungen davon näherungsweise:
$$\frac{dk_n}{d\omega} = \frac{k_n(\omega+\Delta\omega) - k_n(\omega-\Delta\omega)}{2\Delta\omega} = 4.89\cdot 10^{-9}\ \mathrm{s/m},$$
wobei wir eine numerische Schrittweite von $\Delta\omega = 10^{12}\ s^{-1}$ gewählt haben.
Daraus ergibt sich:
$$v_\mathrm{g} = \left(\frac{dk_n}{d\omega}\right)^{-1} = 2.04\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}.$$
Eine "vernünftige" Schrittweite hat man dann gewählt, wenn das Resultat nur unwesentlich von der Schrittweite abhängt.

b) Die Verschiebung der Pulsmaxima nach einer Wegstrecke L ist $\Delta t = L\cdot\left|v_\mathrm{g}^{-1}(\lambda_1) - v_\mathrm{g}^{-1}(\lambda_2)\right|$. Im vorliegenden Fall ist der "group velocity mismatch"
$\mathrm{GVM} = \left|v_\mathrm{g}^{-1}(\lambda_1) - v_\mathrm{g}^{-1}(\lambda_2)\right| = 13.8$ ps/m. Wir erhalten $\Delta t = 1$ ps für $L = 72.4$ mm.

c) Da der Brechungsindex durch $n = 1 - \delta - i\beta$ gegeben ist, ist der Realteil des Brechungsindex über den gesamten gegebenen Spektralbereich kleiner als 1. Somit ist dort die Phasengeschwindigkeit grösser als die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Zudem fällt auf, dass sich Brechungsindex mit wachsender Photonenenergie dem Vakuumindex annähert. Es gilt also der generelle Trend, dass höhere Photonenenergien weniger mit der Materie wechselwirken. Bei ca. 0.8 nm und ca. 17 nm Wellenlänge kann man "Resonanzen" erkennen, welche auf Absorptionslinien zurückzuführen sind.

Aufgabe 2 Frequenzverdopplung

a) Wir haben
$$P_{\mathrm{NL,y}}(t,z) = \frac{\varepsilon_0}{2} d_\mathrm{eff}\left(E_{10}e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + E_{10}^* e^{-i(\omega_1 t - k_1 z)}\right)^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} d_\mathrm{eff}\left(E_{10}^2 e^{2i(\omega_1 t - k_1 z)} + E_{10}^{2*} e^{-2i(\omega_1 t - k_1 z)} + 2\left|E_{10}\right|^2\right)$$
worin wir Frequenzkomponenten mit $\omega_2 = 2\omega_1$ (Frequenzverdopplung) und $\omega = 0$ (optische Gleichrichtung) erkennen.

b) Durch Vergleich der oben erhaltenen Polarisationswelle mit der ursprünglichen ebenen Welle sieht man, dass sie sich mit der Phasengeschwindigkeit der erzeugenden Welle, also mit $\upsilon_1 = c/n_1$ ausbreitet. Die Wellenzahl ist $2k_1 = 2n_1\omega_1/c$, was nur für $n_1 = n_2$ übereinstimmt mit $k_2 = n_2\omega_2/c$.

c) Die Wellengleichung für die harmonische Welle lautet (mit $\mu = 1$)
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_{2y}(t,z) - \frac{1}{\upsilon_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_{2y}(t,z) = \mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}P_{\mathrm{NL},y}(t,z)\,. \tag{1}$$
Mit $E_{2y}(t,z) = \mathrm{Re}\left(E_{2y}(z)e^{i\omega_2 t}\right)$ und $P_{\mathrm{NL},y}(t,z) = \mathrm{Re}\left(P_{\mathrm{NL},y}(z)e^{i\omega_2 t}\right)$ ergibt sich

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_{2y}(z)+\frac{\omega_2^2}{\upsilon_2^2}E_{2y}(z)=-\mu_0\omega_2^2 P_{\mathrm{NL},y}(z)\,. \qquad (2)$$

Nun verwenden wir $E_{2y}(z)=\tilde{E}_{2y}(z)e^{-ik_2 z}$, so dass

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E_{2y}(z)=\frac{\partial^2\tilde{E}_{2y}}{\partial z^2}e^{-ik_2 z}-2ik_2\frac{\partial\tilde{E}_{2y}}{\partial z}e^{-ik_2 z}-k_2^2\tilde{E}_{2y}e^{-ik_2 z} \qquad (3)$$

und ferner

$$P_{\mathrm{NL},y0}(z):=\tilde{P}_{\mathrm{NL},y0}e^{-i2k_1 z} \qquad (4)$$

mit $\tilde{P}_{\mathrm{NL},y0}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 d_{\mathrm{eff}}E_{10}^2$. Nur für $n_1=n_2$ ist $2k_1=k_2$ und somit $P_{\mathrm{NL},y0}(z)$ konstant.

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\frac{\partial^2\tilde{E}_{2y}(z)}{\partial z^2}-2ik_2\frac{\partial\tilde{E}_{2y}(z)}{\partial z}=-\mu_0\omega_2^2\tilde{P}_{\mathrm{NL},y0}e^{i\Delta k\,z}, \qquad (5)$$

Da nun

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2k_2}\frac{\partial^2\tilde{E}_{2y}(z)}{\partial z^2}\right|=\left|\frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial^2\tilde{E}_{2y}(z)}{\partial z^2}\right|=\\&=\left|\text{Änderung von }\frac{\partial\tilde{E}_{2y}(z)}{\partial z}\text{ pro Weglänge }\frac{\lambda}{4\pi}\right|<<\left|\frac{\partial\tilde{E}_{2y}(z)}{\partial z}\right|\end{aligned} \qquad (6)$$

gilt, wenn $\tilde{E}_2(z)$ genügend langsam variiert, können wir den Term zweiter Ordnung vernachlässigen. Für den Fall der Phasenanpassung $\Delta k=k_2-2k_1=0$ steigt dann die Amplitude der Harmonischen gemäss

$$\tilde{E}_{2y}(z)=-i\frac{\mu_0\omega_2^2}{2k_2}\tilde{P}_{\mathrm{NL},y}z \qquad (7)$$

an. Wegen $\Delta k=k_2-2k_1=0$ bleibt die Polarisationswelle mit der frequenzverdoppelten Welle überall in Phase. Dann steigt die Feldamplitude der Harmonischen linear und ihre Leistung quadratisch an.

Erst wenn ein erheblicher Teil der Leistung der Pumpwelle zur Harmonischen konvertiert ist, gibt es eine starke Rückwirkung der frequenzverdoppelten Welle auf die nichtlineare Polarisation, was den weiteren Anstieg von deren Leistung reduziert.

d) Für $\Delta k\neq 0$ erhalten wir

$$\tilde{E}_{2y}(z)=-i\frac{\mu_0\omega_2^2}{2k_2}\tilde{P}_{\mathrm{NL},y}\int_0^z e^{i\Delta k\,z'}dz'=-\frac{\mu_0\omega_2^2}{2k_2}\tilde{P}_{\mathrm{NL},y}\frac{e^{i\Delta k\,z}-1}{\Delta k}\,. \qquad (8)$$

Die Intensität des frequenzverdoppelten Felds oszilliert also zwischen Null und einem Maximalwert und kann deswegen auch bei grosser Kristalllänge keine grossen Werte erreichen. Für eine effiziente Frequenzkonversion ist also Phasenanpassung ($\Delta k=0$) nötig.

e) In der Vorlesung wurde erwähnt, dass in Kristallen der Brechungsindex in der Regel nicht isotrop ist (Details dazu werden im Kapitel 7 behandelt). Für Phasenanpassung müssen also Pumpwelle und Harmonische verschiedene Polarisationszustände haben. Genauer muss die Harmonische den Polarisationszustand haben, für den der Brechungsindex normalerweise kleiner wäre. Doppelbrechung und Dispersion müssen sich genau kompensieren. Diese Bedingung kann bei Raumtemperatur für bestimmte Wellenlängen erfüllt sein, die dann über die Abstimmung der Temperatur oder der Ausbreitungsrichtung noch in gewissem Rahmen verschoben werden können.